Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

10-й класс

Решения

1. Можно ли в выражении

$$2 * 0 * 1 * 2 * 2 * 0 * 1 * 2 * \cdots * 2 * 0 * 1 * 2 = 2013$$

(слева — 2013 групп, каждая из которых состоит из цифр 2, 0, 1, 2) поставить вместо звёздочек знаки сложения и умножения (скобки ставить нельзя) так, чтобы получилось верное равенство?

Ответ: можно.

Решение.

С помощью одной группы можно получить: $0 = 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2,\ 2 = 2 + 0 \cdot 1 \cdot 2,\ 4 = 2 + 0 + 1 \cdot 2,\ 5 = 2 + 0 + 1 + 2$. Если между группами поставить плюсы, взять 1000 групп по 2, 2 группы по 4, одну группу с 5, а остальные — нулевые, то всё получится.

Замечание. Разумеется, существует масса других способов.

2. Можно ли в клетках таблицы 2012×2013 (2012 строк и 2013 столбцов) расставить числа ± 1 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце было отрицательным?

Ответ: нельзя.

Решение.

Если перемножить все числа в таблице, то с одной стороны должно получиться $(-1)^{2012} = 1$, если смотреть по строкам, а с другой — $(-1)^{2013} = -1$, если смотреть по столбцам.

3. Доказать неравенство $x^2z + y^2x + z^2y \geq x^2y + y^2z + z^2x$, если известно, что $x \leq y \leq z$.

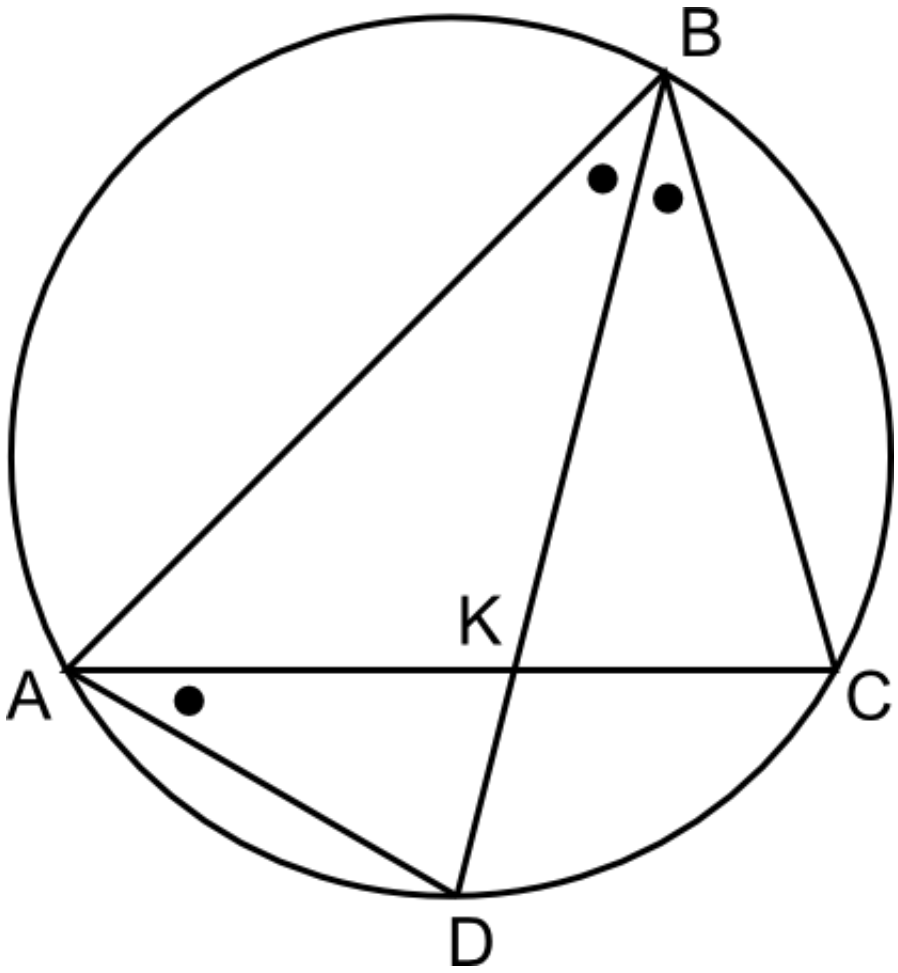
Решение.

Собрав все слагаемые слева, получим $(z - y)x^2 + (y^2 - z^2)x + z^2y - y^2z = (z - y)(x^2 - (y + z)x + zy) = (z - y)(x - y)(x - z) \geq 0$, что и требовалось.

4. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает сторону AC в точке K, а описанную около ABC окружность — в точке D. Верно ли, что DA будет касательной к описанной около треугольника AKB окружности?

Ответ: верно.

Решение.

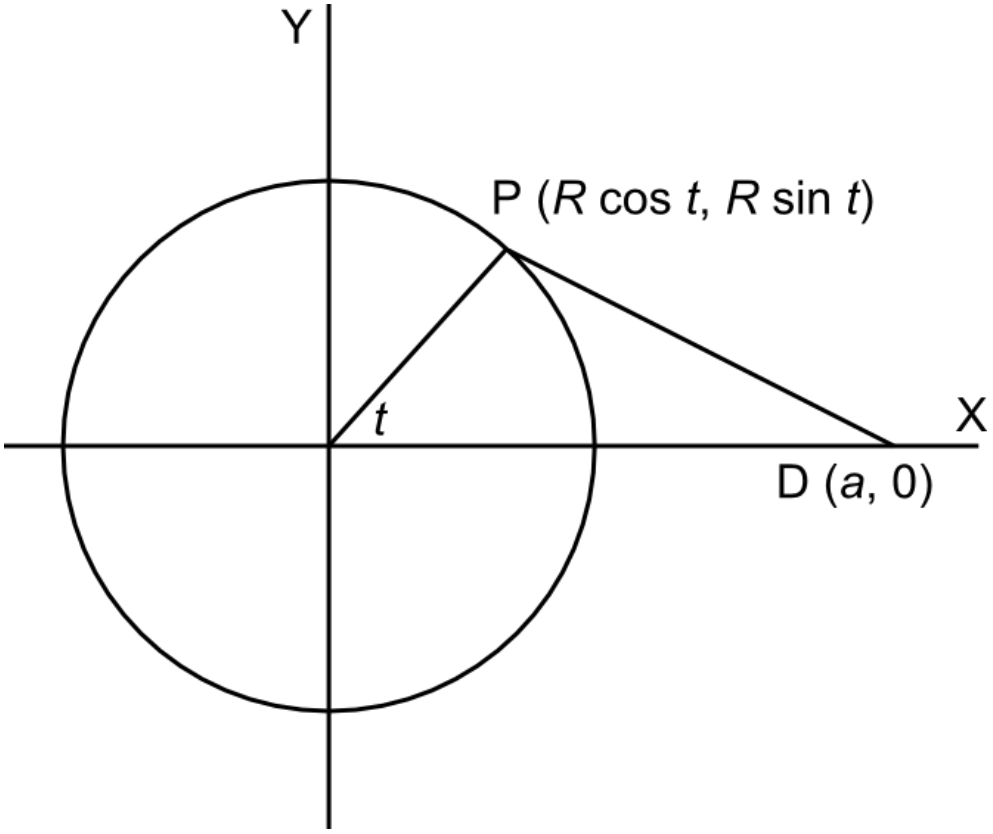


В самом деле, угол *DAC* равен углу *DBC*, то есть углу *ABD*. Тогда треугольники *ABD* и *KAD*, откуда $^{DA}/_{DK} = {}^{DB}/_{DA}$, то есть $DA^2 = DK \cdot DB$. Точка D лежит

вне описанной около *AKB* окружности ω (D лежит на продолжении хорды *BK* этой окружности), поэтому *DK* и *DB* — отрезки секущей. Если провести из D две касательные *DL* и *DM* (L и M — точки касания) к ω, то по известной теореме о касательной и секущей получим $DL^2 = DK \cdot DB = DM^2$. Таким образом, $DA^2 = DL^2 = DM^2$. Но тогда либо $A = L$, либо $A = M$, поскольку справедлива следующая

Лемма. Если точка D лежит вне окружности ω, а M принадлежит ей, то на ω найдётся не более одной новой точки L такой, что $DL^2 = DM^2$.

Доказательство.



Введём систему координат (см. рис., где R — радиус ω, а расстояние от D до центра ω равно $a > R$) и рассмотрим DP^2 как функцию угла $t \in [0,\ \pi]$. Получаем:
$DP^2 = (R\cos t - a)^2 + (R\sin t)^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos t,$
то есть DP^2 строго возрастает на отрезке $t \in [0,\ \pi]$, откуда и следует утверждение леммы.

5. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 разбили на две группы. Верно ли, что хотя бы в одной из двух групп найдутся три числа, одно из которых представляет собой среднее арифметическое двух других?

Ответ: верно.

Решение.

От противного. Предположим, что построено разбиение на две группы, внутри каждой из которых не существует ни одной тройки чисел, одно из которых представляет собой среднее арифметическое двух других. Группа, в которую попала единица, выделяется подчёркиванием снизу, а вторая — подчёркиванием сверху.

Итак, имеем: $\underline{1}\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$.

СЛУЧАЙ 1: $\underline{1}\ \underline{2}\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Тогда $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$.

СЛУЧАЙ 1А: $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Тогда последовательно: $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ 5\ \overline{6}\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ 5\ \overline{6}\ \overline{7}\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \overline{6}\ \overline{7}\ 8\ 9$. Предпоследнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

СЛУЧАЙ 1Б: $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Далее: $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ \underline{5}\ 6\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ \underline{5}\ 6\ 7\ \overline{8}\ 9$, $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ \underline{5}\ \underline{6}\ 7\ \overline{8}\ 9$, $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ \underline{5}\ \underline{6}\ \overline{7}\ \overline{8}\ 9$. Последнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

СЛУЧАЙ 2: $\underline{1}\ \overline{2}\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$.

СЛУЧАЙ 2А: $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Имеем: $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \overline{5}\ 6\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \overline{5}\ 6\ \overline{7}\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \overline{5}\ \underline{6}\ \overline{7}\ 8\ 9$. Предпоследнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

СЛУЧАЙ 2Б: $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Получаем: $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ 6\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ \underline{6}\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ \underline{6}\ 7\ \underline{8}\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ \underline{6}\ \overline{7}\ \underline{8}\ 9$. Последнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

СЛУЧАЙ 2В: $\underline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Теперь: $\underline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ \overline{7}\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ 6\ \overline{7}\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \overline{6}\ \overline{7}\ 8\ 9$. Последнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

Полученное противоречие доказывает требуемое.

6. Пусть длина, ширина и высота некоторого прямоугольного параллелепипеда — натуральные числа. Пусть, далее, V — его объём, S — площадь его полной поверхности, P — его полный периметр (то есть сумма длин всех его 12−и рёбер), p — простое число. Известно, что $V + S + P = p^3 - 8$. Доказать, что данный прямоугольный параллелепипед представляет собой куб.

Решение.

Записав равенство $V + S + P = p^3 - 8$ при помощи длин рёбер $a,\ b,\ c$, получим $abc + 2(ab + ac + bc) + 4(a + b + c) + 8 = p^3$, то есть $(a + 2)(b + 2)(c + 2) = p^3$. Поскольку слева стоит произведение трёх натуральных чисел, каждое из которых не меньше 3, а справа — куб простого числа, постольку по основной теореме арифметики получаем $a + 2 = b + 2 = c + 2 = p$, что и требовалось.